

带有条件故障边的 k 元 2 方体的圈嵌入

冯 凯¹, 王世英²FENG Kai¹, WANG Shiyong²

1.山西大学 计算机与信息技术学院, 太原 030006

2.山西大学 数学科学学院, 太原 030006

1.School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan 030006, China

2.School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan 030006, China

FENG Kai, WANG Shiyong. Embedding cycles in k -ary 2-cubes with conditional edge faults. *Computer Engineering and Applications*, 2012, 48(5): 32-34.

Abstract: The k -ary n -cube has been the most commonly used interconnection topology for distributed-memory parallel systems. This paper considers the cycle embedding problem in k -ary 2-cubes with conditional edge faults and shows that there exists a cycle of every even length from 4 to k^2 in a k -ary 2-cube with at most 3 edge faults in which each vertex is incident with at least two healthy edges for even $k \geq 4$.

Key words: k -ary 2-cubes; embedding cycles; conditional faults

摘 要: k 元 n 方体已经成为分布式储存并行系统最常用的网络拓扑结构。研究带有条件故障边的 k 元 2 方体的圈嵌入问题, 证明了在 $k \geq 4$ 为偶整数的 k 元 2 方体中, 若其故障边数不超过 3 且每个顶点至少与两条非故障边相关联, 那么该 k 元 2 方体存在长度在 4 到 k^2 间的任意偶长的无故障圈。

关键词: k 元 2 方体; 圈嵌入; 条件故障

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2012.05.009 文章编号: 1002-8331(2012)05-0032-03 文献标识码: A 中图分类号: TP393; O157.5

1 引言和基本概念

许多并行于分布式系统通常以某种网络作为拓扑结构, 譬如彼得森网络、超立方网络和 k 元 n 方体网络等。由于具有易执行、低延迟和高带宽等优良的性质, k 元 n 方体已经得到了广泛的研究^[1-4]。在实际应用中, 网络出现故障是不可避免的, 因此对于网络拓扑结构容错性能的研究显得尤为重要。所谓条件故障是对故障分布的一种限制, 即要求故障发生时整个网络拓扑结构中每个顶点至少存在两条非故障边与其相关联。近来, 带有条件故障的各种网络拓扑结构的无故障圈嵌入得到了大量的关注。本文将研究带有条件故障边的 k 元 2 方体的圈嵌入问题, 并给出了带有条件故障边的 k 元 2 方体存在无故障圈的一个充分条件。

在介绍主要结果之前, 先引入一些基本概念和标记。对于文中其他未加定义而被使用的图论术语和记号参见文献[5]。 k 元 2 方体 ($k \geq 2$), 记为 Q_2^k , 是指由 k^2 个顶点构成的图, 其中任一顶点 u 可记为 $u = u_1 u_2$, 这里 $0 \leq u_1, u_2 \leq k-1$ 。两个顶点 $u = u_1 u_2$ 和 $v = v_1 v_2$ 相邻当且仅当存在整数 $j \in \{1, 2\}$ 使得 $u_j = v_j \pm 1 \pmod{k}$ 以及对于 $i \in \{1, 2\} \setminus \{j\}$ 有 $u_i = v_i$ 。为了简便起见, 下文类似表述之处省略“(mod k)”。顶点 u 和 v 间这样的边 (u, v) 称为该 k 元 2 方体的一条 j 维边。通过去除掉 Q_2^k 中所有的 j 维边, 可以将 Q_2^k 沿 j 维划分为 k 个不同的长为 k 的圈 $Q[0], Q[1], \dots, Q[k-1]$ 。设 G_1 和 G_2 为两个图, $G_1 \Delta G_2$ 为由 $E(G_1) \Delta E(G_2)$ 导出的子图, 其中 $E(G_1) \Delta E(G_2)$ 表示 $E(G_1)$ 和 $E(G_2)$ 的对称差。为了使用方便, 将 Q_2^k 中点 ab 记为 $v_{a,b}$, 其中 $0 \leq a, b \leq k-1$ 。令 $P_{i,j} = (v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i+1,j+1}, v_{i+1,j}, v_{i,j})$ 。

2 主要结果

引理 2.1^[1] 设 $k \geq 4$ 为偶整数, 若 Q_2^k 中条件故障边的个数不超过 3, 则该 Q_2^k 中存在无故障的 Hamilton 圈。

定理 2.2 设 $k \geq 4$ 为偶整数, 若 Q_2^k 中条件故障边的个数不超过 3, 则该 Q_2^k 中存在长度在 4 到 k^2 间的任意偶长的无故障圈。

证明 显然, 只需考虑 Q_2^k 中条件故障边的个数为 3 时的情形。由引理 2.1 可知, 证明该 Q_2^k 中有长度在 4 到 $k^2 - 2$ 间的任意偶长的无故障圈即可。此时, 该 Q_2^k 中的 0 维边和 1 维边中必有某一维中至少含有两条条件故障边, 不妨设它中至少有两条 1 维条件故障边。将 Q_2^k 沿 1 维划分为 k 个长为 k 的圈 $Q[0], Q[1], \dots, Q[k-1]$ 。不失一般性, 设 $Q[0]$ 与 $Q[k-1]$ 间的 1 维故障边数 f 是所有的 $Q[i]$ 与 $Q[i+1]$ 间的 1 维故障边数中最多的, 其中 $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ 。以下分为两种情形进行讨论:

情形 1 所有的条件故障边均为 1 维边。

情形 1.1 $f=3$

此时对于整数 $0 \leq n \leq k-2$, $P_{0,0} \Delta P_{1,0} \Delta \dots \Delta P_{n,0}$ 为 Q_2^k 中长为 $l=2(n+2)$ 的无故障圈, 其中 $4 \leq l \leq 2k$ 为偶数。记构造的长为 $2k$ 的圈为 C_1 , 对于偶数 $0 \leq n \leq k-2$, $C_1 \Delta P_{0,1} \Delta P_{2,1} \Delta \dots \Delta P_{n,1}$ 为 Q_2^k 中长为 $l=2k+(n+2)$ 的无故障圈, 其中 $2k+2 \leq l \leq 3k$ 为偶数。这样一直做下去, 取 $i \in \{2, 3, \dots, k-2\}$, 记构造的长为 $(i+1)k$ 的圈为 C_i , 对于偶数 $0 \leq n \leq k-2$, $C_i \Delta P_{0,i} \Delta P_{2,i} \Delta \dots \Delta P_{n,i}$ 为 Q_2^k 中长为 $l=(i+1)k+(n+2)$ 的无故障圈, 其中 $(i+1)k+2 \leq l \leq (i+2)k$ 为偶数。从而构造出了该情形下 Q_2^k 中长度在 4 到 k^2 间的任意偶长的无故障圈。

基金项目: 国家自然科学基金(No.61070229)。

作者简介: 冯凯(1987—), 男, 博士研究生, 主要研究领域为系统优化和图论及其应用; 王世英(1961—), 男, 博士, 教授, 博导。E-mail: shiyong@sxu.edu.cn

收稿日期: 2010-09-07; **修回日期:** 2010-11-22; **CNKI 出版:** 2011-03-04; <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2127.TP.20110304.0927.011.html>

情形 1.2 $f=2$

设不在 $Q[0]$ 与 $Q[k-1]$ 间的另一条 1 维故障边 e 在 $Q[i]$ 与 $Q[i+1]$ 之间。不失一般性, 设 $e=(v_{0,i}, v_{0,i+1})$ 。讨论以下两种情形:

情形 1.2.1 $i \in \{0, k-2\}$

由对称性, 只需考虑 $i=k-2$ 即可。此时由情形 1.1 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 $(k-1)k$ 间的任意偶长的无故障圈。记构造的长为 $(k-1)k$ 的圈为 C , 对于偶数 $2 \leq n \leq k-2$, $C\Delta P_{2,k-2}\Delta P_{4,k-2}\Delta \cdots \Delta P_{n,k-2}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(k-1)k+n$ 的无故障圈, 其中 $(k-1)k+2 \leq l \leq k^2-2$ 为偶数。

情形 1.2.2 $i \in \{1, 2, \dots, k-3\}$

由情形 1.1 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 $(i+1)k$ 间的任意偶长的无故障圈。记构造的长为 $(i+1)k$ 的圈为 C' , 对于偶数 $2 \leq n \leq k-2$, $C'\Delta P_{2,i}\Delta P_{4,i}\Delta \cdots \Delta P_{n,i}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(i+1)k+n$ 的无故障圈, 其中 $(i+1)k+2 \leq l \leq (i+2)k-2$ 为偶数。记构造的长为 $(i+2)k-2$ 的圈为 C^0 , 对于偶数 $2 \leq n \leq k-2$, $C^0\Delta P_{2,i+1}\Delta P_{4,i+1}\Delta \cdots \Delta P_{n,i+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(i+2)k+n-2$ 的无故障圈, 其中 $(i+2)k \leq l \leq (i+3)k-4$ 为偶数。记构造的长为 $(i+3)k-4$ 的圈为 C , 则 $C\Delta P_{1,i+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $(i+3)k-2$ 的无故障圈, $C\Delta P_{1,i+1}\Delta P_{0,i+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $(i+3)k$ 的无故障圈。若 $i+2 \leq k-2$, 取 $j \in \{i+2, i+3, \dots, k-2\}$, 记构造的长为 $(j+1)k$ 的圈为 C_j , 对于偶数 $0 \leq n \leq k-2$, $C_j\Delta P_{0,j}\Delta P_{2,j}\Delta \cdots \Delta P_{n,j}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(j+1)k+(n+2)$ 的无故障圈, 其中 $(j+1)k+2 \leq l \leq (j+2)k$ 为偶数。从而构造出了该情形下 Q_2^k 中长度在 4 到 k^2 间的任意偶长的无故障圈。

情形 1.3 $f=1$

记不在 $Q[0]$ 与 $Q[k-1]$ 间的 1 维故障边为 e_1 和 e_2 。不失一般性, 假设 $e_1=(v_{0,i}, v_{0,i+1})$, e_2 为 $Q[j]$ 与 $Q[j+1]$ 间的 1 维故障边, 其中 $0 \leq i < j \leq k-2$ 。讨论以下三种情形:

情形 1.3.1 不存在 $t \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ 使得一条故障边为 $Q[t]$ 与 $Q[t+1]$ 间的 1 维边, 另一条故障边为 $Q[t+1]$ 与 $Q[t+2]$ 间的 1 维边。

由情形 1.2.2 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 $(j+1)k$ 间的任意偶长的无故障圈。假设 $e_2 \in E(P_{0,j})$, 则由情形 1.2.2 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 $(j+1)k+2$ 到 $(j+3)k$ 间的任意偶长的无故障圈。下面假设 $e_2 \in E(P_{s,j})$, 其中 $2 \leq s \leq k-2$ 为偶数。记构造的长为 $(j+1)k$ 的圈为 C' , 对于偶数 $0 \leq n \leq s-2$, $C'\Delta P_{0,j}\Delta P_{2,j}\Delta \cdots \Delta P_{n,j}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(j+1)k+(n+2)$ 的无故障圈, 其中 $(j+1)k+2 \leq l \leq (j+1)k+s$ 为偶数。若 $s < k-2$, 则对于偶数 $s+2 \leq n \leq k-2$, $C'\Delta P_{0,j}\Delta P_{2,j}\Delta \cdots \Delta P_{s-2,j}\Delta P_{s+2,j}\Delta \cdots \Delta P_{n,j}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(j+1)k+n$ 的无故障圈, 其中 $(j+1)k+s+2 \leq l \leq (j+2)k-2$ 为偶数。记构造的长为 $(j+2)k-2$ 的圈为 C^0 , 对于偶数 $0 \leq n \leq s-2$, $C^0\Delta P_{0,j+1}\Delta P_{2,j+1}\Delta \cdots \Delta P_{n,j+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(j+2)k+n$ 的无故障圈, 其中 $(j+2)k \leq l \leq (j+2)k+s-2$ 为偶数。若 $s < k-2$, 则对于偶数 $s+2 \leq n \leq k-2$, $C^0\Delta P_{0,j+1}\Delta P_{2,j+1}\Delta \cdots \Delta P_{s-2,j+1}\Delta P_{s+2,j+1}\Delta \cdots \Delta P_{n,j+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(j+2)k+n-2$ 的无故障圈, 其中 $(j+2)k+s \leq l \leq (j+3)k-4$ 为偶数。记构造的长为 $(j+3)k-4$ 的圈为 C , 则 $C\Delta P_{s+1,j+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $(j+3)k-2$ 的无

故障圈, $C\Delta P_{s+1,j+1}\Delta P_{s,j+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $(j+3)k$ 的无故障圈。

无论 e_2 如何分布, 若 $j+2 \leq k-2$, 取 $r \in \{j+2, j+3, \dots, k-2\}$, 记构造的长为 $(r+1)k$ 的圈为 C_r , 对于偶数 $0 \leq n \leq k-2$, $C_r\Delta P_{0,r}\Delta P_{2,r}\Delta \cdots \Delta P_{n,r}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(r+1)k+(n+2)$ 的无故障圈, 其中 $(r+1)k+2 \leq l \leq (r+2)k$ 为偶数。从而构造出了该情形下 Q_2^k 中长度在 4 到 k^2 间的任意偶长的无故障圈。

情形 1.3.2 恰存在一个 $t \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ 使得一条故障边为 $Q[t]$ 与 $Q[t+1]$ 间的 1 维边, 另一条故障边为 $Q[t+1]$ 与 $Q[t+2]$ 间的 1 维边。

由对称性, 只需考虑 $j=k-2$ 即 e_2 为 $Q[k-2]$ 与 $Q[k-1]$ 间的 1 维故障边。此时 $i \neq 0$ 。由情形 1.2.2 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 $(k-1)k$ 间的任意偶长的无故障圈。记构造的长为 $(k-1)k$ 的圈为 C 。假设 $e_2 \in E(P_{0,k-2})$, 则对于偶数 $2 \leq n \leq k-2$, $C\Delta P_{2,k-2}\Delta P_{4,k-2}\Delta \cdots \Delta P_{n,k-2}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(k-1)k+n$ 的无故障圈, 其中 $(k-1)k+2 \leq l \leq k^2-2$ 为偶数。下面假设 $e_2 \in E(P_{s,k-2})$, 其中 $2 \leq s \leq k-2$ 为偶数。对于偶数 $0 \leq n \leq s-2$, $C\Delta P_{0,k-2}\Delta P_{2,k-2}\Delta \cdots \Delta P_{n,k-2}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(k-1)k+(n+2)$ 的无故障圈, 其中 $(k-1)k+2 \leq l \leq (k-1)k+s$ 为偶数。若 $s < k-2$, 则对于偶数 $s+2 \leq n \leq k-2$, $C\Delta P_{0,k-2}\Delta P_{2,k-2}\Delta \cdots \Delta P_{s-2,k-2}\Delta P_{s+2,k-2}\Delta \cdots \Delta P_{n,k-2}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(k-1)k+n$ 的无故障圈, 其中 $(k-1)k+s+2 \leq l \leq k^2-2$ 为偶数。

情形 1.3.3 存在一个 $t \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ 使得三条故障边分别为 $Q[t]$ 与 $Q[t+1]$ 间的 1 维边, $Q[t+1]$ 与 $Q[t+2]$ 间的 1 维边以及 $Q[t+2]$ 与 $Q[t+3]$ 间的 1 维边。

由对称性, 只需考虑 $i=k-3$, $j=k-2$ 即 $e_1=(v_{0,k-3}, v_{0,k-2})$ 且 e_2 为 $Q[k-2]$ 与 $Q[k-1]$ 间的 1 维故障边。由情形 1.1 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 $(k-2)k$ 间的任意偶长的无故障圈。记构造的长为 $(k-2)k$ 的圈为 C_0 。对于偶数 $2 \leq n \leq k-2$, $C_0\Delta P_{2,k-3}\Delta P_{4,k-3}\Delta \cdots \Delta P_{n,k-3}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(k-2)k+n$ 的无故障圈, 其中 $(k-2)k+2 \leq l \leq (k-1)k-2$ 为偶数。记构造的长为 $(k-1)k-2$ 的圈为 C 。令 $Q[k-1]$ 与 $Q[0]$ 间的 1 维故障边为 e_0 。

假设 $e_0 \in E(P_{s,k-1})$, 其中 $2 \leq s \leq k-2$ 为偶数。对于偶数 $0 \leq n \leq s-2$, $C\Delta P_{0,k-1}\Delta P_{2,k-1}\Delta \cdots \Delta P_{n,k-1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(k-1)k+n$ 的无故障圈, 其中 $(k-1)k \leq l \leq (k-1)k+s-2$ 为偶数。若 $s < k-2$, 则对于偶数 $s+2 \leq n \leq k-2$, $C\Delta P_{0,k-1}\Delta P_{2,k-1}\Delta \cdots \Delta P_{s-2,k-1}\Delta P_{s+2,k-1}\Delta \cdots \Delta P_{n,k-1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(k-1)k+n-2$ 的无故障圈, 其中 $(k-1)k+s \leq l \leq k^2-4$ 为偶数。记构造的长为 k^2-4 的圈为 C_1 。若 $e_2 \in E(P_{0,k-2})$, 则 $C_1\Delta P_{s,k-2}$ 为 Q_2^k 中长度为 k^2-2 的无故障圈; 若 $e_2 \notin E(P_{0,k-2})$, 则 $C_1\Delta P_{0,k-2}$ 为 Q_2^k 中长度为 k^2-2 的无故障圈。

假设 $e_0 \in E(P_{0,k-1})$, 则对于偶数 $2 \leq n \leq k-2$, $C\Delta P_{2,k-1}\Delta P_{4,k-1}\Delta \cdots \Delta P_{n,k-1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(k-1)k+n-2$ 的无故障圈, 其中 $(k-1)k \leq l \leq k^2-4$ 为偶数。这时 $C\Delta P_{2,k-1}\Delta Q[k-1]$ 为 Q_2^k 中长度为 k^2-2 的无故障圈。

情形 2 三条条件故障边中有一条 0 维故障边。

记该 0 维故障边为 e^0 。设 $F_1^r = \{(v_{0,r}, v_{1,r}), (v_{2,r}, v_{3,r}), \dots, (v_{k-2,r}, v_{k-1,r})\}$, $F_2^r = \{(v_{1,r}, v_{2,r}), (v_{3,r}, v_{4,r}), \dots, (v_{k-3,r}, v_{k-2,r}), (v_{k-1,r}, v_{0,r})\}$ 。

记 $F_1 = F_1^0 \cup F_1^1 \cup \dots \cup F_1^{k-1}$, $F_2 = F_2^0 \cup F_2^1 \cup \dots \cup F_2^{k-1}$, 则有 $e^0 \in F_1$ 或者 $e^0 \in F_2$ 。

情形 2.1 $f=2$

由对称性, 只需考虑 $e^0 \in E(Q[\frac{k}{2}]) \cup E(Q[\frac{k}{2}+1]) \cup \dots \cup E(Q[k-1])$ 。若 $e^0 \in F_2$, 则由情形 1.1 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 k^2 间的任意偶长的无故障圈。若 $e^0 \in F_1$, 则由情形 1.1 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 $2k$ 间的任意偶长的无故障圈。记 $C_1 = P_{1,0} \Delta P_{2,0} \Delta \dots \Delta P_{k-1,0}$, 对于奇数 $1 \leq n \leq k-1$, $C_1 \Delta P_{1,1} \Delta P_{3,1} \Delta \dots \Delta P_{n,1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=2k+(n+1)$ 的无故障圈, 其中 $2k+2 \leq l \leq 3k$ 为偶数。这样一直做下去, 取 $i \in \{2, 3, \dots, k-2\}$, 记构造的长为 $(i+1)k$ 的圈为 C_i , 对于奇数 $1 \leq n \leq k-1$, $C_i \Delta P_{1,i} \Delta P_{3,i} \Delta \dots \Delta P_{n,i}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(i+1)k+(n+1)$ 的无故障圈, 其中 $(i+1)k+2 \leq l \leq (i+2)k$ 为偶数。从而构造出了该情形下 Q_2^k 中长度在 4 到 k^2 间的任意偶长的无故障圈。

情形 2.2 $f=1$

令 $Q[k-1]$ 与 $Q[0]$ 间的 1 维故障边为 e_0 。不失一般性, 设另一条 1 维故障边为 $e_1 = (v_{0,i}, v_{0,i+1})$, 其中 $0 \leq i \leq k-2$ 。讨论以下两种情形:

情形 2.2.1 $i=0$ 或者 $i=k-2$

由对称性, 只需考虑 $i=k-2$ 且 $e^0 \in E(Q[\frac{k-2}{2}]) \cup E(Q[\frac{k}{2}]) \cup \dots \cup E(Q[k-1])$ 的情况。假设 $e^0 \in E(Q[k-1])$, 令 $e^0 = (v_{s,k-1}, v_{s+1,k-1})$ 。若 $e^0 \in F_2$ 或者 $e^0 = (v_{0,k-1}, v_{1,k-1})$, 则由情形 1.2.1 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 k^2-2 间的任意偶长的无故障圈。若 $e^0 \in F_1$ 且 $e^0 \neq (v_{0,k-1}, v_{1,k-1})$, 则由情形 1.2.1 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 $(k-1)k$ 间的任意偶长的无故障圈。记构造的长为 $(k-1)k$ 的圈为 C 。对于偶数 $2 \leq n \leq s-2$, $C \Delta P_{2,k-2} \Delta P_{4,k-2} \Delta \dots \Delta P_{n,k-2}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(k-1)k+n$ 的无故障圈, 其中 $(k-1)k+2 \leq l \leq (k-1)k+s-2$ 为偶数。若 $s < k-2$, 则对于偶数 $s+2 \leq n \leq k-2$, $C \Delta P_{2,k-2} \Delta P_{4,k-2} \Delta \dots \Delta P_{s-2,k-2} \Delta P_{s+2,k-2} \Delta \dots \Delta P_{n,k-2}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=(k-1)k+n-2$ 的无故障圈, 其中 $(k-1)k+s \leq l \leq k^2-4$ 为偶数。这时 $C \Delta P_{s,k-2} \Delta Q[k-1] \Delta P_{0,k-3}$ 为 Q_2^k 中长度为 k^2-2 的无故障圈。

假设 $e^0 \notin E(Q[k-1]) \cup E(Q[1])$ 。若 $e^0 \in F_2$, 则由情形 1.2.1 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 k^2-2 间的任意偶长的无故障圈。若 $e^0 \in F_1$, 令 $e^0 = (v_{s,j}, v_{s+1,j})$, 则由情形 1.2.1 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 jk 间以及 $(j+2)k$ 到 k^2-2 间的任意偶长的无故障圈。与情形 1.3.1 中方法类似, 可以构造出 Q_2^k 中长度在 $jk+2$ 到 $(j+2)k-4$ 间的任意偶长的无故障圈。记构造的长为 $(j+1)k-2$ 的圈为 C_0 , 则 $C_0 \Delta P_{s-2,j} \Delta Q[j+1]$ 为 Q_2^k 中长度为 $(j+2)k-2$ 的无故障圈。

假设 $e^0 \in E(Q[1])$, 这时 $k=4$ 。若 $e^0 = (v_{0,1}, v_{3,1})$, 则由情形 1.2.1 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 14 间的任意偶长的无故障圈。若 $e^0 \notin \{(v_{0,1}, v_{3,1}), (v_{1,1}, v_{2,1})\}$, 则由情形 1.2.1 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度为 12 和 14 的无故障圈。记构造的长为 12 的圈为 C_1 , 则 $C_1 \Delta P_{s+2,1}$ 为 Q_2^k 中长度为 10 的无故障圈。这时对于整数 $0 \leq n \leq 2$, $P_{1,0} \Delta \dots \Delta P_{1,n}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=2n+4$ 的无故障

圈, 其中 $4 \leq l \leq 8$ 为偶数。若 $e^0 = (v_{1,1}, v_{2,1})$, 对于整数 $0 \leq n \leq 2$, $P_{2,0} \Delta \dots \Delta P_{2,n}$ 为 Q_2^k 中长度为 $l=2n+4$ 的无故障圈, 其中 $4 \leq l \leq 8$ 为偶数。记这时构造的长为 8 的圈为 C_2 , 则 $C_2 \Delta P_{1,2}$ 为 Q_2^k 中长度为 10 的无故障圈。令 $C_3 = (v_{1,0}, v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,0})$, 则 $C_2 \Delta P_{1,2} \Delta C_3$ 为 Q_2^k 中长度为 12 的无故障圈, $C_2 \Delta P_{1,2} \Delta C_3 \Delta P_{3,0}$ 为 Q_2^k 中长度为 14 的无故障圈。

情形 2.2.2 $1 \leq i \leq k-3$

不失一般性, 不妨设 $i \geq (k-1)-(i+1)$, 则 $i+1 \geq \frac{k}{2}$ 。分两种情形讨论。

情形 2.2.2.1 $i+1 = \frac{k}{2}$

由对称性, 只需考虑 $e^0 \in E(Q[\frac{k}{2}]) \cup E(Q[\frac{k}{2}+1]) \cup \dots \cup E(Q[\frac{k}{2} + \lfloor \frac{k-2}{4} \rfloor])$ 的情况。令 $e^0 = (v_{s,r}, v_{s+1,r})$, 则 $2 \leq r \leq k-2$ 。假设 $e^0 \in F_2$, 则由情形 1.2.2 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 $(\frac{k}{2}+2)k-4$ 间的任意偶长的无故障圈。记构造的长为 $(\frac{k}{2}+2)k-4$ 的圈为 C 。若 $e^0 \notin \{(v_{1,i+1}, v_{2,i+1}), (v_{1,i+2}, v_{2,i+2})\}$, 则 $C \Delta P_{1,i+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $(\frac{k}{2}+2)k-2$ 的无故障圈, $C \Delta P_{1,i+1} \Delta P_{0,i+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $(\frac{k}{2}+2)k$ 的无故障圈; 若 $e^0 \in \{(v_{1,i+1}, v_{2,i+1}), (v_{1,i+2}, v_{2,i+2})\}$, 则 $C \Delta P_{k-1,i+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $(\frac{k}{2}+2)k-2$ 的无故障圈, $C \Delta P_{k-1,i+1} \Delta P_{0,i+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $(\frac{k}{2}+2)k$ 的无故障圈。由情形 1.2.2 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 $(\frac{k}{2}+2)k+2$ 到 k^2-2 间的任意偶长的无故障圈。

假设 $e^0 \in F_1$, 则由情形 2.1 中 $e^0 \in F_1$ 时的构造方法可以得到 Q_2^k 中长度在 4 到 $\frac{k^2}{2}$ 间的任意偶长的无故障圈。因为 $\theta: v_{i,j} \rightarrow v_{k-1,j}$ (其中 $0 \leq i, j \leq k-1$) 为 Q_2^k 的一个自同构映射, 则类似上一段中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 $\frac{k^2}{2}+2$ 到 k^2-2 间的任意偶长的无故障圈。

情形 2.2.2.2 $i+1 > \frac{k}{2}$

只考虑 $e^0 \in E(Q[\frac{i+1}{2}]) \cup E(Q[\frac{i+1}{2}+1]) \cup \dots \cup E(Q[i+1 + \lfloor \frac{(k-1)-(i+1)}{2} \rfloor])$ 的情况即可。令 $e^0 = (v_{s,r}, v_{s+1,r})$, 则 $2 \leq r \leq k-2$ 。假设 $e^0 \in F_2$, 则由情形 1.2.2 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 4 到 $(i+3)k-4$ 间的任意偶长的无故障圈。记构造的长为 $(i+3)k-4$ 的圈为 C 。若 $e^0 \notin \{(v_{1,i+1}, v_{2,i+1}), (v_{1,i+2}, v_{2,i+2})\}$, 则 $C \Delta P_{1,i+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $(i+3)k-2$ 的无故障圈, $C \Delta P_{1,i+1} \Delta P_{0,i+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $(i+3)k$ 的无故障圈; 若 $e^0 \in \{(v_{1,i+1}, v_{2,i+1}), (v_{1,i+2}, v_{2,i+2})\}$, 则 $C \Delta P_{k-1,i+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $(i+3)k-2$ 的无故障圈, $C \Delta P_{k-1,i+1} \Delta P_{0,i+1}$ 为 Q_2^k 中长度为 $(i+3)k$ 的无故障圈。由情形 1.2.2 中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 $(i+3)k+2$ 到 k^2-2 间的任意偶长的无故障圈。

假设 $e^0 \in F_1$, 则由情形 2.1 中 $e^0 \in F_1$ 时的构造方法可以得到 Q_2^k 中长度在 4 到 $(i+1)k$ 间的任意偶长的无故障圈。因为 $\theta: v_{i,j} \rightarrow v_{k-1,j}$ (其中 $0 \leq i, j \leq k-1$) 为 Q_2^k 的一个自同构映射, 则

(下转 40 页)

法在函数逼近问题上的优越性。

5.3 Iris 分类问题测试

Iris 数据集即鸢尾花数据集,它是用于测试分类器性能的一个基本数据集。Iris 分为三种,每种有四种属性:萼片长度、萼片宽度、花瓣长度和花瓣宽度。在数据集中,三种 Iris 各有 50 组数据,总共有 150 组数据。实验将 Iris 数据集作为算法的测试实例,将 150 组数据分为训练数据和测试数据,随机选取 100 个训练数据和 50 个测试数据。

实验选用三层的 RBF 神经网络。根据 Iris 属性选定输入层为四个节点,每个节点代表一种属性,输出层选定为三个节点,每个输出节点代表一类 Iris。设定隐层节点数为 10 个。实验结果如表 1 所示。

表 1 不同算法训练结果比较

算法	迭代次数	均方误差	平均正确率/(%)
改进 PSO	500	7.128 90E-4	95.81
标准 PSO	500	2.134 44E-3	93.92
自组织选取中心	—	7.261 73E-3	90.62

由表 1 可以看出改进的 PSO 算法训练的神经网络在非线性的分类问题上的识别正确率优于标准 PSO 算法与自组织选取中心算法。

6 结论

对 RBF 神经网络基于粒子群优化的学习算法进行了研究,对粒子群优化算法进行了改进,并将改进的粒子群优化算法用于神经网络的学习训练,同时与标准 PSO 算法、自组织选取中心算法进行了性能比较。结果表明,改进的粒子群优化算法能加快寻优的收敛速度,减小迭代次数,同时有利于函数摆脱局部极值点。将其用于 RBF 神经网络的训练效果提升明

显,提高了网络泛化能力和优化效果,增强了网络对非线性问题的处理能力,而且更快地收敛于最优解。

参考文献:

- [1] 阎平凡,张长水.神经网络与模拟进化计算[M].北京:清华大学出版社,2000.
- [2] 李林,李建兵,牛鹏超.基于粒子群算法的 RBF 神经网络的优化方法[J].山东电力高等专科学校学报,2010,13(1):51-53.
- [3] Gudise V G, Venayagamoorthy G K. Comparison of particle swarm optimization and back propagation as training algorithms for neural networks[C]//Proc of IEEE Swarm Intelligence Symposium, 2003:110-117.
- [4] Qin Zheng, Jia Ji. A PSO-based subtractive clustering technique for designing RBF neural networks[C]//IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2008, 2008:2047-2052.
- [5] 徐乐华,凌卫新,熊丽.基于面向对象自适应粒子群算法的神经网络训练[J].计算机应用研究,2009,26(1):111-113.
- [6] 沈学利,张红岩,张纪锁.改进粒子群算法对 BP 神经网络的优化[J].计算机系统应用,2010,19(2):57-61.
- [7] 田雨波.混合神经网络技术[M].北京:科学出版社,2009.
- [8] 王启付,王战江,王书.一种动态改变惯性权重的粒子群优化算法[J].中国机械工程,2005,16(11):945-948.
- [9] Chatterjee A, Siarry P. Nonlinear inertia weight variation for dynamic adaptation in particle swarm optimization[J]. Computers and Operations Research, 2006, 33(3):859-871.
- [10] 刘建华,樊晓平,瞿志华.一种惯性权重动态调整的新型粒子群算法[J].计算机工程与应用,2007,43(7):68-70.
- [11] 王丽,王晓凯.一种非线性改变惯性权重的粒子群算法[J].计算机工程与应用,2007,43(4):47-48.
- [12] 田雨波,朱人杰,薛权祥.粒子群优化算法中惯性权重的研究进展[J].计算机工程与应用,2008,44(23):39-41.

(上接 34 页)

类似上一段中方法可以构造出 Q_2^k 中长度在 $(i+1)k+2$ 到 k^2-2 间的任意偶长的无故障圈。证毕。

上述定理给出的结果是最优的,原因如下:(1)当 $k \geq 4$ 为偶数时, Q_2^k 是一个二部图,它中不含奇圈。(2)当 $k=4$ 时,假设 Q_2^4 中条件故障边集合为 $F = \{(v_{0,0}, v_{0,1}), (v_{0,0}, v_{0,3}), (v_{2,0}, v_{2,1}), (v_{2,0}, v_{2,3})\}$, 则该 Q_2^4 所有可能的无故障的 Hamilton 圈必须经过边 $(v_{0,0}, v_{1,0}), (v_{1,0}, v_{2,0}), (v_{2,0}, v_{3,0})$ 以及 $(v_{3,0}, v_{0,0})$, 而这四条边已经构成 $Q_2^4 - F$ 中一个长为 4 的圈,可知 $Q_2^4 - F$ 中不存在 Hamilton 圈,因此故障数不能够再增加(见图 1)。

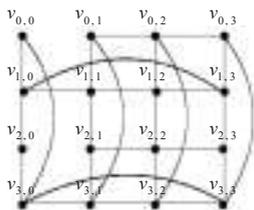


图 1 带有四条条件故障边的 Q_2^4

3 结束语

目前,随着高性能多处理机技术的发展,人们越来越关注

具有优良性能的互连网络拓扑结构。本文对带有条件故障边的 k 元 2 方体互连网络的圈嵌入问题进行了研究,证明了在 $k \geq 4$ 为偶整数的 k 元 2 方体中,若其条件故障边数不超过 3,则存在长度在 4 到 k^2 间的任意偶长的无故障圈。这一结论将为工程师设计以该网络为拓扑结构时提供有益的参考。当 $n \geq 2$ 时,带有条件故障边的 k 元 n 方体 ($k \geq 4$ 为偶整数)的不同长度的圈嵌入问题是值得进一步研究的方向。

参考文献:

- [1] Ashir Y A, Stewart I A. Fault-tolerant embeddings of hamiltonian circuits in k-ary n-cubes[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2002, 15(3):317-328.
- [2] Wang Shiyong, Lin Shangwei. Path embeddings in faulty 3-ary n-cubes[J]. Information Science, 2010, 180(1):191-197.
- [3] Wang Shiyong, Wang Ruixia, Lin Shangwei, et al. Matching preclusion for k-ary n-cubes[J]. Discrete Applied Mathematics, 2010, 158(18).
- [4] 张淑蓉,王世英.故障广义 4 元 n 方体中不同长度的路嵌入[J].计算机工程与应用,2010,46(14):81-83.
- [5] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory[M]. New York: Springer, 2007.