山西大学学报(自然科学版)36(3):389－392,2013
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

文章编号:0253-2395(2013)03-0389-04

k 元 n 方体的边容错性

冯凯[1],王世英[2]

(1. 山西大学 计算机与信息技术学院,山西 太原 030006;2. 山西大学 数学科学学院,山西 太原 030006)

摘　要:k 元 n 方体是并行与分布式处理系统最常用的互连网络拓扑结构之一. 研究了 k 元 n 方体中不存在 k 元($n-m$)方体子结构的最小 边故障数目 $f_{n,m}$,其中 $k\geqslant 3$ 是奇数,证明了 $f_{n,0}=1$,$k^n\leqslant f_{n,m}\leqslant \binom{n}{m}k^m$,$f_{n,n-1}=nk^{n-1}$ 以及 $f_{n,1}=k+\lceil \frac{k}{n-1}\rceil$.

关键词:互连网络;k 元 n 方体;容错性;边故障

中图分类号:O157.5　　　**文献标志码**:A

1　引言和基本概念

诸多大规模多处理器系统以互连网络作为其基本的拓扑结构,互连网络通常用一个无向简单图 $G=(V(G),E(G))$ 来表示,其中 $V(G)$ 中每个顶点对应一个处理器,$E(G)$ 中每条边对应一对处理器之间的一条直接通讯线路. 对于大规模多处理器系统来说,故障的发生在所难免. 基于这一缘由,互连网络的容错性成为一个热点问题并得到了广泛的研究[1-6]. 互连网络的容错性通常以网络在发生故障时其拓扑性质的保持程序来度量. Becker 和 Simon 在文[2]中提出一个有意义的问题:一定数目的元件发生故障时,该互连网络遭到破坏的最大维数能达到多少?Latifi 在文[3]中提出了一个类似的问题:一个互连网络在故障发生时还将有一个多大规模的无故障子网络?之后,Latifi 等人在文[4]中研究了使得 n 维 Star 网络中不存在($n-k$)维子 Star 网络的最小的边故障数 $f_s(n,k)$.

k 元 n 方体网络是并行与分布式处理系统最常用的互连网拓扑结构之一. 由于具有易执行、低延迟和高带宽等优良的性质,k 元 n 方体已经得到了广泛的研究[7-8]. 目前,以 k 元 n 方体为基础拓扑构建的著名的并行计算机系统有 iWarp[9]、Cray T3D[10] 以及 Cray T3E[11] 等. Wang 等人在文[6]中研究了使得 k 元 n 方体中不存在 k 元($n-m$)方体子结构的最小的点故障数. 本文将研究使得 k 元 n 方体中不存在 k 元($n-m$)方体子结构的最小的边故障数目 $f_{n,m}$.

在介绍主要结果之前,先引入一些基本概念和标记. 对于文中其他未加定义而被使用的图论术语和记号参见[12]. k 元 n 方体($k\geqslant 2,n\geqslant 1$),记为 Q_n^k,是一个具有 k^n 个顶点的图,其中任一顶点可标号为 $u=\delta_0\delta_1\cdots\delta_{n-1}$,这里对于任一整数 $i(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 均有 $0\leqslant\delta_i\leqslant k-1$. 两个顶点 $u=\delta_0\delta_1\cdots\delta_{n-1}$ 和 $v=\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}$ 相邻当且仅当存在一个整数 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$,使得 $\delta_j=\sigma_j\pm 1(\mathrm{mod}\ k)$ 且对于任意的 $l\in\{0,1,\cdots,n-1\}\backslash\{j\}$ 均有 $\delta_l=\sigma_l$. 这样的一条边 (u,v) 称为 Q_n^k 的一条 j 维边. 为了简便起见,下文中类似表述之处省略“$(\mathrm{mod}\ k)$”. 对于 $0\leqslant d\leqslant n-1$,通过去除掉 Q_n^k 中所有的 d 维边,可以将 Q_n^k 沿 d 维划分为 $Q_{(d)}[0],Q_{(d)}[1],\cdots,Q_{(d)}[k-1]$,其中 $Q_{(d)}[p]$ 为 Q_n^k 的由点集 $\{u=\delta_0\delta_1\cdots\delta_d\cdots\delta_{n-1}\in V(Q_n^k):\delta_d=p\}$ 导出的子图,这里 $0\leqslant p\leqslant k-1$. 容易得出,$Q_{(d)}[p]$ 和 Q_{n-1}^k 是同构的. 设 G 和 H 是两个无向简单图. 若它们的顶点集不包含公共点,则称 G 和 H 是不相交的. 对于图 G 的两个点子集 X 和 Y,用 $[X,Y]$ 表示一个端点在 X 中,另一个端点在 Y 中的所有边的集合.

*收稿日期:2013-03-04;修回日期:2013-04-13

基金项目:国家自然科学基金(61070229);教育部博士点基金(博导类)(20111401110005)

作者简介:冯凯(1987－),男,山西临汾人,博士研究生,主要研究领域为系统优化和图论. E-mail:217fenger@163.com

2 主要结果

这一节我们研究使得 Q_n^k 中不存在 Q_{n-m}^k 子结构的最小的边故障数目 $f_{n,m}$，其中 $0\leqslant m\leqslant n-1$. 显然，$Q_n^k$ 是其自身的一个子图. 注意到 $E(Q_n^k)$ 中任一条边发生故障均可以破坏 Q_n^k 原有的结构. 我们有 $f_{n,0}\leqslant 1$ 成立. 由 $f_{n,m}$ 的定义可知，$f_{n,m}>0$ 且 $f_{n,m}$ 为整数. 因此，$f_{n,0}=1$.

引理 1[6] 设 $k\geqslant 3$ 为奇数. 那么 Q_n^k 中存在 k^m 个互不相交的 Q_{n-m}^k 子结构.

引理 2[6] 设 $n\geqslant 2$ 为整数，$k\geqslant 3$ 为奇数. 那么 Q_n^k 中恰好存在 $\binom{n}{m}k^m$ 个互个相同的 Q_{n-m}^k 子结构.

定理 1 对于奇数 $k\geqslant 3$，$k^m\leqslant f_{n,m}\leqslant\binom{n}{m}k^m$.

证明 当 $n=1$ 时，由于 $0\leqslant m\leqslant n-1$，可得 $m=0$. 注意到 $f_{1,0}=1=k^0$，可知此时定理成立. 下面我们假设 $n\geqslant 2$. 由引理 1 可知，Q_n^k 中存在 k^m 个互不相交的 Q_{n-m}^k 子结构. 要破坏这 k^m 个互不相交的 Q_{n-m}^k 子结构，每个 Q_{n-m}^k 子结构中至少有一条边发生故障. 因此，$f_{n,m}\geqslant k^m$.

由引理 2 可知，Q_n^k 中恰好存在 $\binom{n}{m}k^m$ 个互不相同的 Q_{n-m}^k 子结构. 注意到每一个 Q_{n-m}^k 子结构中的任意一条边发生故障均可以破坏该子结构. 故至多需要 $\binom{n}{m}k^m$ 条故障边可以使 Q_n^k 中不存在 Q_{n-m}^k 子结构，这意味着 $f_{n,m}\leqslant\binom{n}{m}k^m$. 因此，我们有 $k^m\leqslant f_{n,m}\leqslant\binom{n}{m}k^m$ 成立. 证毕.

由 $Q_{n-(n-1)}^k$（即 Q_1^k）的定义可知，Q_1^k 是一个 k 圈. 在研究 $f_{n,n-1}$ 之前，我们先给出如下引理.

引理 3[6] 设 $k\geqslant 3$ 为奇数，C 为 Q_n^k 中一个 k 圈. 那么存在一个整数 $i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$ 使得 C 仅包含 i 维边.

引理 4 设 $n\geqslant 2$ 为整数，$k\geqslant 3$ 为奇数. 那么 Q_n^k 中任意两个互不相同的 k 圈不包含公共的边.

证明 设 C_1 和 C_2 是 Q_n^k 中两个不同的 k 圈. 由引理 3 可知，对于任意的 $i\in\{1,2\}$，存在一个整数 $l_i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$ 使得 C_i 仅包含 l_i 维边. 若 $l_i=l_2$，容易验证 C_1 和 C_2 是互不相交的；若 $l_1\neq l_2$，则 $E(C_1)\cap E(C_2)=\emptyset$. 因此，$C_1$ 和 C_2 不包含公共的边. 证毕.

对于 $0\leqslant i\leqslant n-1$，定义从点集 $V(Q_n^k)$ 到边集 $E(Q_n^k)$ 的映射 φ_i：$\delta_0\cdots\delta_{n-1}\rightarrow(\delta_0\cdots\delta_i\cdots\delta_{n-1},\delta_0\cdots(\delta_i+1)\cdots\delta_{n-1})$. 设 $V'=\{v_1,v_2,\cdots,v_t\}$ 为 $V(Q_n^k)$ 的一个点子集，其中 $1\leqslant t\leqslant|V(Q_n^k)|$. 对于 $j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，我们将边集合 $\{\varphi_j(v_1),\varphi_j(v_2),\cdots,\varphi_j(v_t)\}$ 记为 $\varphi_j(V')$.

定理 2 对于奇数 $k\geqslant 3$，$f_{n,n-1}=nk^{n-1}$. 进一步，可以找出使得 Q_n^k 中不存在 Q_1^k 子结构的有最小边数目的故障边集合.

证明 当 $n=1$ 时，由于 $0\leqslant m\leqslant n-1$，可得 $m=0$. 注意到 $f_{1,0}=1=k^0$ 且有 $E(Q_1^k)$ 中任一条边发生故障均可以破坏其原有的结构，可知此时定理成立. 下面我们假设 $n\geqslant 2$. 由引理 2 可知，Q_n^k 中恰好存在 nk^{n-1} 个互不相同的 Q_1^k 子结构（即 k 圈）. 由引理 4 可知，Q_n^k 中任意两个互不相同的 k 圈不包含公共的边. 因此，至少需要 nk^{n-1} 条故障边可以使 Q_n^k 中不存在 k 圈，这意味着 $f_{n,n-1}\geqslant nk^{n-1}$. 由定理 1，我们有 $f_{n,n-1}\leqslant nk^{n-1}$ 成立. 从而可知 $f_{n,n-1}=nk^{n-1}$.

接下来，对于 $n\geqslant 2$，我们介绍一种找出使得 Q_n^k 中不存在 Q_1^k 子结构的有最小边数目的故障边集合的方法. 对于任意的 $0\leqslant d\leqslant n-1$，可以将 Q_n^k 沿 d 维划分为 $Q_{(d)}[0],Q_{(d)}[1],\cdots,Q_{(d)}[k-1]$. 任取 $p\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，则 $\varphi_p(V(Q_{(p)}[0]))$ 是一个可以破坏 Q_n^k 中仅含 p 维边的 k^{n-1} 个互不相交的 k 圈的故障边集合. 注意到，对于任意两个不同的整数 $i,j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，故障集 $\varphi_i(V(Q_{(i)}[0]))$ 破坏的 k 圈与故障集 $\varphi_j(V(Q_{(j)}[0]))$ 破坏的 k 圈是互不相同的. 又因为 $|\bigcup_{i=0}^{n-1}\varphi_i(V(Q_{(i)}[0]))|=nk^{n-1}$ 且 Q_n^k 中恰好存在 nk^{n-1} 个互不相同的 k 圈，我们可知 $Q_n^k-\bigcup_{i=0}^{n-1}\varphi_i(V(Q_{(i)}[0]))$ 中不存在 k 圈. 故 $\bigcup_{i=1}^{n-1}\varphi_i(V(Q_{(i)}[0]))$ 即为所求的故障边集合.

定理 3 对于奇数 $k\geqslant 3$ 和整数 $n\geqslant 2$，$f_{n,1}=k+\ulcorner\frac{k}{n-1}\urcorner$. 进一步，可以找出使得 Q_n^k 中不存在 Q_{n-1}^k 子结

构的有最小边数目的故障边集合.

证明 由定理2可知,当$n=2$时定理成立.下面我们假设$n\geqslant 3$.由引理2可知,Q_n^k中恰好存在nk个互不相同的Q_{n-1}^k子结构.对于任意的$0\leqslant d\leqslant n-1$,去除掉$Q_n^k$中所有的$d$维边,可以将$Q_n^k$划分为$Q_{(d)}[0],Q_{(d)}[1],\cdots,Q_{(d)}[k-1]$.显然,$Q_{(d)}[0],Q_{(d)}[1],\cdots,Q_{(d)}[k-1]$是$k$个互不相交的$Q_{n-1}^k$子结构.注意到,对于任意两个不同的整数$i,j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$,去除掉所有的$i$维边得到的$Q_{n-1}^k$子结构与去除掉所有的$j$维边得到的$Q_{n-1}^k$子结构是互不相同的.对于$i=0,1,\cdots,k-1$,设$\mathbb{Q}[i]=\{Q_{(0)}[i],Q_{(1)}[i],\cdots,Q_{(n-1)}[i]\}$.因为$|\bigcup_{i=0}^{k-1}\mathbb{Q}[i]|=nk$,于是我们将$Q_n^k$中所有的$Q_{n-1}^k$子结构划分成了$k$个互不相交的集合$\mathbb{Q}[0],\mathbb{Q}[1],\cdots,\mathbb{Q}[k-1]$.

断言 $E(Q_n^k)$中的任一条边发生故障恰好可以破坏Q_n^k中$n-1$个不同的Q_{n-1}^k子结构.

设e为Q_n^k中的一条任选的边,不妨设e是一条j维边,其中$j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$.因为对于任意的$i\in\{0,1,\cdots,n-1\}\setminus\{j\}$,去除掉$Q_n^k$中所有的$i$维边得到的$Q_{(i)}[0],Q_{(i)}[1],\cdots,Q_{(i)}[k-1]$是互不相交的,故存在一个整数$p\in\{0,1,\cdots,k-1\}$使得$e\in E(Q_{(i)}[p])$.由$i$选取的任意性可知,$e$发生故障恰好可以破坏$Q_n^k$中$n-1$个不同的$Q_{n-1}^k$子结构.断言证毕.

由断言可知,要破坏Q_n^k中nk个不同的Q_{n-1}^k子结构至少需要$\left\lceil\frac{nk}{n-1}\right\rceil$条故障边,这意味着$f_{n,1}\geqslant\left\lceil\frac{nk}{n-1}\right\rceil=k+\left\lceil\frac{k}{n-1}\right\rceil$.

对于$0\leqslant i\leqslant k-1$,注意到$\mathbb{Q}[i]$中每一个$Q_{n-1}^k$子结构均包含点$ii\cdots i$.设$e_i=(\delta_0\delta_1\cdots\delta_{n-1},\delta_0^*\delta_1^*\cdots\delta_{n-1}^*)$,其中$\delta_{i(\mathrm{mod}\ n)}=i,\delta_{i(\mathrm{mod}\ n)}^*=i+1(\mathrm{mod}\ k),\delta_j=\delta_j^*=i$对于$0\leqslant j\leqslant n-1$且$j\neq i(\mathrm{mod}\ n)$均成立.那么$e_i$发生故障可以破坏$\mathbb{Q}[i]$中除了由点集$\{\sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}\in V(Q_n^k):\sigma_{i(\mathrm{mod}\ n)}=i\}$导出的子图外的其余$n-1$个不同的$Q_{n-1}^k$子结构.可知此时$Q_n^k-\{e_0,e_1,\cdots,e_{k-1}\}$中恰好存在$k$个不同的$Q_{n-1}^k$子结构$Q_{(0(\mathrm{mod}\ n))}[0],Q_{(1(\mathrm{mod}\ n))}[1],\cdots,Q_{((k-1)(\mathrm{mod}\ n))}[k-1]$.

当$k<n-1$时,设$E^*=\{(012\cdots(k-1)00\cdots0,012\cdots(k-1)10\cdots0)\}\subseteq E(Q_n^k)$.注意到此时对于任意的$0\leqslant i\leqslant k-1$,我们有$(012\cdots(k-1)00\cdots0,012\cdots(k-1)10\cdots0)\in E(Q_{(i)}[i])$成立.故当$k<n-1$时,$E^*$是一个可以破坏$Q_n^k-\{e_0,e_1,\cdots,e_{k-1}\}$中$k$个不同的$Q_{n-1}^k$子结构的故障边集合.

当$\frac{k}{n-1}$为整数时,我们首先将$Q_n^k-\{e_0,e_1,\cdots,e_{k-1}\}$中未被破坏的$k$个不同的$Q_{n-1}^k$子结构划分为$\frac{k}{n-1}$个不相交的集合$\Theta_1=\{Q_{(0)}[0],Q_{(1)}[1],\cdots,Q_{(n-2)}[n-2]\},\Theta_2=\{Q_{(n-1)}[n-1],Q_{(n(\mathrm{mod}\ n))}[n],\cdots,Q_{((2n-3)(\mathrm{mod}\ n))}[2n-3]\},\cdots,\Theta_{\frac{k}{n-1}}=\{Q_{((k-n+1)(\mathrm{mod}\ n))}[k-n+1],Q_{((k-n+2)(\mathrm{mod}\ n))}[k-n+2],\cdots,Q_{((k-1)(\mathrm{mod}\ n))}[k-1]\}$.注意到删去边$(012\cdots(n-2)0,012\cdots(n-2)1)$可以破坏$\Theta_1$中$n-1$个不同的$Q_{n-1}^k$子结构,删去边$(n(n+1)\cdots(2n-3)0(n-1),n(n+1)\cdots(2n-3)1(n-1))$可以破坏$\Theta_2$中$n-1$个不同的$Q_{n-1}^k$子结构,$\cdots$,删去边$\left(\left(\frac{nk}{n-1}-n\right)\cdots(k-1)0(k-n+1)\cdots\left(\frac{nk}{n-1}-n-1\right),\left(\frac{nk}{n-1}-n\right)\cdots(k-1)1(k-n+1)\cdots\left(\frac{nk}{n-1}-n-1\right)\right)$可以破坏$\Theta_{\frac{k}{n-1}}$中$n-1$个不同的$Q_{n-1}^k$子结构.记$E^*=\{(012\cdots(n-2)0,012\cdots(n-2)1),(n(n+1)\cdots(2n-3)0(n-1),n(n+1)\cdots(2n-3)1(n-1)),\cdots,\left(\left(\frac{nk}{n-1}-n\right)\cdots(k-1)0(k-n+1)\cdots\left(\frac{nk}{n-1}-n-1\right),\left(\frac{nk}{n-1}-n\right)\cdots(k-1)1(k-n+1)\cdots\left(\frac{nk}{n-1}-n-1\right)\right)\}$,则当$\frac{k}{n-1}$为整数时,$E^*$是一个可以破坏$Q_n^k-\{e_0,e_1,\cdots,e_{k-1}\}$中$k$个不同的$Q_{n-1}^k$子结构的故障边集合.

当$k\geqslant n$且$\frac{k}{n-1}$不是整数时,记$r=\left\lceil\frac{k}{n-1}\right\rceil$,我们首先将$Q_n^k-\{e_0,e_1,\cdots,e_{k-1}\}$中未被破坏的$k$个不同的$Q_{n-1}^k$子结构划分为$r$个不相交的集合$\Omega_1=\{Q_{(0)}[0],Q_{(1)}[1],\cdots,Q_{(n-2)}[n-2]\},\Omega_2=\{Q_{(n-1)}[n-1],Q_{(n(\mathrm{mod}\ n))}[n],\cdots,Q_{((2n-3)(\mathrm{mod}\ n))}[2n-3]\},\cdots,\Omega_{r-1}=\{Q_{((nr-r-2n+2)(\mathrm{mod}\ n))}[nr-r-2n+2],Q_{((nr-r-2n+3)(\mathrm{mod}\ n))}[nr-r-2n+3],\cdots,Q_{((nr-r-n)(\mathrm{mod}\ n))}[nr-r-n]\},\Omega_r=\{Q_{((nr-r-n+1)(\mathrm{mod}\ n))}[nr-r-n+1],Q_{((nr-r-n+2)(\mathrm{mod}\ n))}[nr-r-n+2],\cdots,Q_{((k-1)(\mathrm{mod}\ n))}[k-1]\}$,注意到删去边$(012\cdots(n-2)0,012\cdots(n-2)1)$可以破坏$\Omega_1$中$n-1$个不同的$Q_{n-1}^k$子结构,删去边$(n(n+1)\cdots(2n-3)0(n-1),n(n+1)\cdots(2n-3)1(n-1))$可以破坏$\Omega_2$中$n-1$个

不同的 Q_{n-1}^k 子结构，…，删去边$((nr-2n)(nr-2n+1)\cdots(nr-r-n)0(nr-r-2n+2)\cdots(nr-2n-1),(nr-2n)(nr-2n+1)\cdots(nr-r-n)1(nr-r-2n+2)\cdots(nr-2n-1))$可以破坏 Ω_{r-1} 中 $n-1$ 个不同的 Q_{n-1}^k 子结构，删去边$((nr-n)\cdots(k-1)00\cdots0(nr-n-r+1)\cdots(nr-n-1),(nr-n)\cdots(k-1)10\cdots0(nr-n-r+1)\cdots(nr-n-1))$可以破坏 Ω_r 中 $k-(r-1)(n-1)$个不同的 Q_{n-1}^k 子结构. 记 $E^*=\{(012\cdots(n-2)0,012\cdots(n-2)1),(n(n+1)\cdots(2n-3)0(n-1),n(n+1)\cdots(2n-3)1(n-1)),\cdots((nr-2n)(nr-2n+1)\cdots(nr-r-n)0(nr-r-2n+2)\cdots(nr-2n-1),(nr-2n)(nr-2n+1)\cdots(nr-r-n)1(nr-r-2n+2)\cdots(nr-2n-1)),((nr-n)\cdots(k-1)00\cdots0(nr-n-r+1)\cdots(nr-n-1),(nr-n)\cdots(k-1)10\cdots0(nr-n-r+1)\cdots(nr-n-1))\}$，则当 $k\geqslant n$ 且$\frac{k}{n-1}$不是整数时，E^* 是一个可以破坏 $Q_n^k-\{e_0,e_1,\cdots,e_{k-1}\}$中 k 个不同的 Q_{n-1}^k 子结构的故障边集合.

综上所述，无论哪种情况发生，$Q_n^k-(\{e_0,e_1,\cdots,e_{k-1}\}\cup E^*)$中不存在 Q_{n-1}^k 子结构. 因为$|E^*|=\lceil \frac{k}{n-1}\rceil$，故 $f_{n,1}\leqslant k+\lceil \frac{k}{n-1}\rceil$. 从而可知，$f_{n,1}=k+\lceil \frac{k}{n-1}\rceil$ 并且$\{e_0,e_1,\cdots,e_{k-1}\}\cup E^*$ 即为所求的故障边集合. 证毕.

参考文献：

[1] Ashir Yaagoub A, Stewart Iain A. Fault-tolerant Embeddings of Hamiltonian Circuits in k-ary n-cubes[J]. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2002, **15**(3): 317-328.

[2] Becker Bernd, Simon Hans-Ulrich. How Robust is the n-cube[C]. Proceedings of 27th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1986: 283-291.

[3] Latifi Shahram. A Study of Fault Tolerance in Star Graph[J]. *Information Processing Letters*, 2007, **102**(5): 196-200.

[4] Latifi Shahram, Saberinia Ebrahim, Wu Xiao-long. Robustness of Star Graph Network Under Link Failure[J]. *Information Sciences*, 2008, **178**(3): 802-806.

[5] Wang Shi-ying, Lin Shang-wei. Path Embeddings in Faulty 3-ary n-cubes[J]. *Information Sciences*, 2010, **180**(1): 191-197.

[6] Wang Shi-ying, Zhang Guo-zhen, Feng Kai. Fault Tolerance in k-ary n-cube Networks[J]. *Theoretical Computer Science*, 2012, **460**: 34-41.

[7] Bose Bella, Broeg Bob, Kwon Younggeun, *et al*. Lee Distance and Topological Properties of k-ary n-cubes[J]. *IEEE Transactions on Computers*, 1995, **44**(8): 1021-1030.

[8] Dally William J. Performance Analysis of k-ary n-cube Interconnection Networks[J]. *IEEE Transactions on Computers*, 1990, **39**: 775-785,

[9] Peterson Craig, Sutton James, Wiley Paul. iWarp: a 100-MOPS, LIW Microprocessor for Multicomputers[J]. *IEEE Micro*, 1991, **11**(3): 26-29, 81-87.

[10] Kessler R E, Schwarzmeier J L. Cray T3D: a new Dimension for Cray Research[C]. Proceedings of the 38th IEEE Computer Society International Conference, San Francisco, CA, 1993: 176-182.

[11] Anderson Ed, Brooks Jeff, Grassl Charles, *et al*. Performance of the CRAY T3E Multiprocessor[C]. Proceedings of Supercomputing, ACM/IEEE 1997 Conference, Nov, 1997: 1-17.

[12] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory[M]. New York: Springer, 2007.

Link Failure Tolerance in k-ary n-cubes

FENG Kai[1], WANG Shi-ying[2]

(1. *School of Computer Science and Technology, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*;
2. *School of Mathematical Science, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

Abstract: The k-ary n-cube is one of the most popular interconnection networks for parallel and distributed systems. $f_{n,m}$ is the minimum number of faulty links that make every k-ary $(n-m)$-cube faulty in a k-ary n-cube under link failure models. In this paper, we proved that $f_{n,0}=1$, $k^m\leqslant f_{n,m}\leqslant\binom{n}{m}k^m$ for odd $k\geqslant3$, $f_{n,n-1}=nk^{n-1}$ for odd $k\geqslant3$, and $f_{n,1}=k+\lceil \frac{k}{n-1}\rceil$ for odd $k\geqslant3$ and $n\geqslant2$.

Key words: interconnection networks; k-ary n-cubes; fault tolerance; link failure